



排列與組合

陳秀騰先生

數學教育組

電郵地址: stchan@emb.gov.hk



新高中數學課程的相關內容

14. 排列與組合

14.1 理解計數原理的加法法則和乘法法則

14.2 理解排列的概念和記法

14.3 解不同物件的無重排列應用題

14.4 理解組合的概念和記法

14.5 解不同物件的無重組合應用題



乘法原理

- 做一件事時，完成它需要分成 n 個步驟，做成第一步有 m_1 種不同的方法，第二步有 m_2 種不同的方法，...，第 n 步有 m_n 種不同的方法。那麼完成這件事共有
- $N = m_1 \times m_2 \times m_3 \times \dots \times m_n$



加法原理

- 做一件事時，完成它可以有 n 類辦法，在第一類辦法中有 m_1 種不同的方法，在第二類辦法中有 m_2 種不同的方法，...，在第 n 類辦法中有 m_n 種不同的方法。那麼完成這件事共有
- $N = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n$



排列組合的綜合應用

注意兩點：

1. 對問題的分析、考慮是否能歸納為排列、組合的問題？若能，再判斷是屬於排列問題還是組合問題？
2. 對題目所給的條件限制要作仔細推敲，認真分析，利用圖示法，簡化問題



排列組合的綜合應用

突破難點的關鍵：

- 透徹理解加法原理、乘法原理
- 千萬不能混淆
 - 不同類的方法
 - 不同步的方法



排列組合的綜合應用

不重不漏



例子:

- 若干件產品中抽出幾件產品來檢驗，如果把抽出的產品中至多有2件次品的抽法有幾種？
- 分為兩類：
 - 第一類抽出的產品中有2件次品
 - 第二類抽出的產品中有1件次品
 - 漏掉了抽出的產品中無次品的情況



例子:

➤ 有些學生把能被2、被3、或被6整除的數分為三類:

- 第一類為能被 2 整除的數
- 第二類為能被 3 整除的數
- 第三類為能被 6 整除的數

○ 這三類數互有重複部分



排列組合的綜合應用

見多識廣

1. 分類與分步

- 類與類之間用加號 “+”
- 步與步之間用 “×” 號連結

2. 有序與無序

3. 類與步的交錯

- “類中有步” 與 “步中有類”

知易行難



示例一：

畫樹形圖

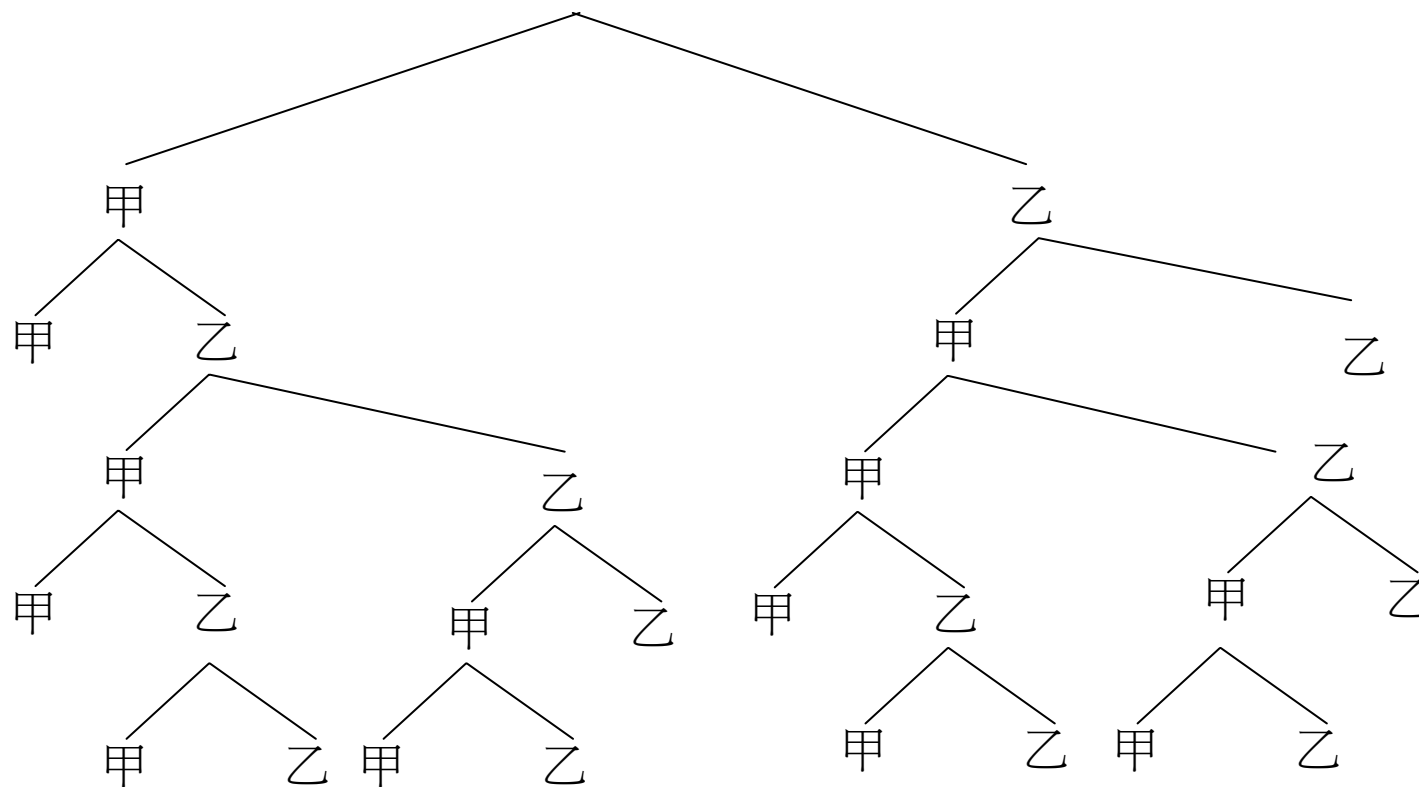
- 甲、乙兩人打乒乓球，誰先連勝頭兩局、則誰贏。如果沒有人連勝頭兩局，則誰先勝三局誰贏，打到決出輸贏為止，問有多少種可能情況？



數數

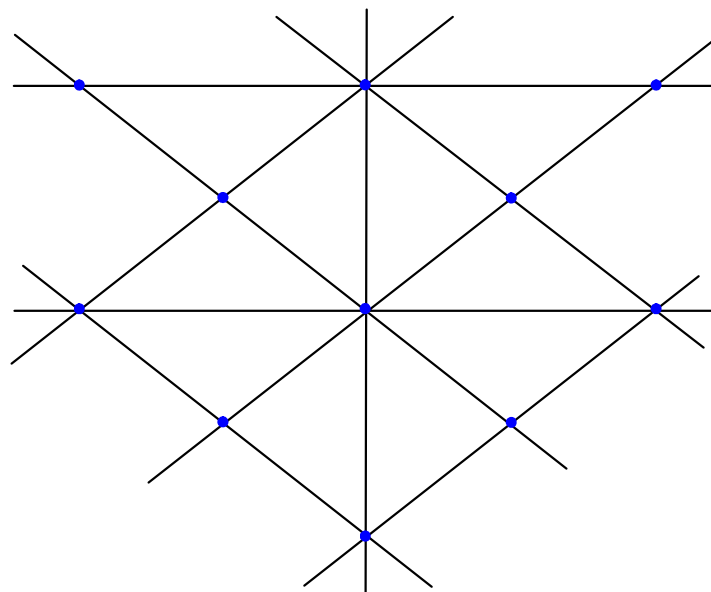
- 甲甲、甲乙甲甲、甲乙甲乙甲、甲乙甲乙乙、
甲乙乙甲甲、甲乙乙甲乙、甲乙乙乙、乙甲甲
甲、乙甲甲乙甲、乙甲甲乙乙、乙甲乙甲甲、
乙甲乙甲乙、乙甲乙乙、乙乙

畫樹形圖



示例二:

從右圖中 11 個交
點中任取 3 個
點，可畫出多少
個三角形？

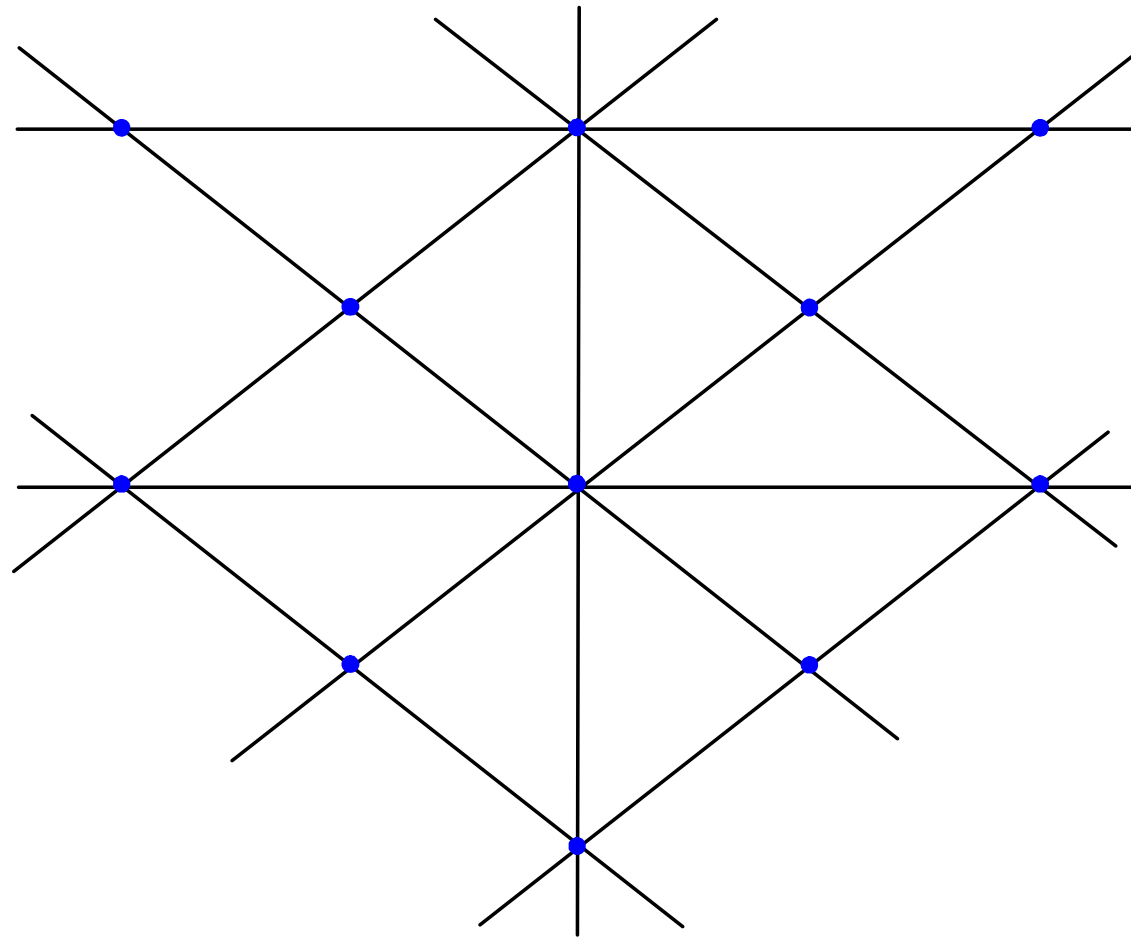




分析:

- 組合問題? 排列問題?
- 用排除法
 - 三點在一條直線上
 - 四點在一條直線上

示例二:





排除法

- 三點共線不能構成的三角形有 $7C_3^3$
- 四點共線不能構成的三角形有 $2C_3^4$
- 所以，可以畫出三角形：

$$C_3^{11} - (7C_3^3 + 2C_3^4) = 165 - (7 + 8) = 150$$

選擇座位

- 假設某教室有四張椅子，甲、乙、丙、丁四位學生依序選擇座位，試問共有幾種不同的選法？



[解]:

- 第一步：甲生從四張椅子任選一張 → 4種選法
- 第二步：在甲生選定後，乙生從剩下三張椅子任選一張 → 3種選法
- 第三步：在甲乙二人選定後，丙生從剩下二張椅子任選一張 → 2種選法
- 第四步：在甲乙丙三人選定後，丁生只能選擇剩下的一張椅子 → 1種選法
- 由乘法原理知，共有 24 種選法



選擇座位

- 假設教室有七張椅子，有四位學生依序選擇座位，試問共有幾種不同的選法？

$$P_4^7 = \frac{7!}{(7-4)!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$$

車牌號碼：

- 某地方的車牌號碼，前兩位為大寫英文字母，後四位為數字，例如 **AB - 0950**，
若最後一位數字不能為 4，且後四位數字沒有 0000 這個號碼，那麼該地方可能有的車牌號碼有多少個？

$$10 \times 10 \times 10 \times 9 = 9000$$

$$26 \times 26 \times (9000 - 1)$$



另類?

○ 若 $P_3^{2n} = 28P_2^n$ 求 n 之值?

$$P_3^{2n} = 28P_2^n$$

$$\Rightarrow 2n(2n-1)(2n-2) = 28n(n-1)$$

$$\Rightarrow 8n^2 - 40n + 32 = 0$$

$$\Rightarrow n = 4, n = 1$$

$$n \geq 2 \quad \text{因此 } n = 4$$

排列:

- 甲 乙 丙...等七人排成一列，若 甲 排首且 乙 排末，共有多少種排法？

[解]: 在甲乙兩人之間需排5人，故共有

$$P_5^5 = 5! = 120$$



選委會

- 從6男5女中, 任選4人組一委員會, 其中至少包含2男1女, 試問共有幾種選法?

- [解]: 可能情形: 2男2女, 3男1女, 故共有

$$C_2^6 \times C_2^5 + C_3^6 \times C_1^5 = 250$$



生活中的實例

- 一副撲克牌共有52張，自中任取5張，5張為full house (如 $a a a b b$) 共有多少種?

[解]:

- 先從13個號碼中選1個: C_1^{13}
- 再從選出的號碼中選3種花色: C_3^4
- 其次從剩下的12個號碼中選一個: C_1^{12}
- 從選出的第二個號碼中選2種花色: C_2^4
- 故共有 $C_1^{13} \times C_3^4 \times C_1^{12} \times C_2^4 = 3744$ 種。

三條 (three of a kind)

- 一副撲克牌共有52張，自中任取5張，5張為三條(如 $a a a b c$ ，三同二異) 共有多少種？

$$C_1^{13} \times C_3^4 \times C_2^{12} \times C_1^4 \times C_1^4 = 109824$$



某人玩撲克牌遊戲，隨意取得 52 張牌中的 5 張。求他獲得以下事件的概率。

(a) 同花順子 (flush straight)



(b) 四條 (four of a kind)

(c) 三條及一對 (full house)

(d) 同花 (flush)



(e) 順子 (straight)



(f) 三條 (three of a kind)

(g) 二對 (two pairs)

(h) 一對 (one pair)

(i) 散張 (no relation)

節錄自數學教育組網內的「數學百子櫃」

建議答案:

(a) P(同花順子)

$$= \frac{4 \times 10}{C_5^{52}}$$

$$= \frac{40}{2598960}$$

$$\approx 0.0000154$$

A	2	3	4	5
2	3	4	5	6
		...		
9	10	J	Q	K
10	J	Q	K	A



Flush (同花)

$$\begin{aligned} \text{(d) } P(\text{同花}) &= \frac{4 \times C_5^{13} - 4 \times 10}{C_5^{52}} \\ &= \frac{5108}{2598960} \\ &\approx 0.00197 \end{aligned}$$

Straight (順子)

(e) P(順子)

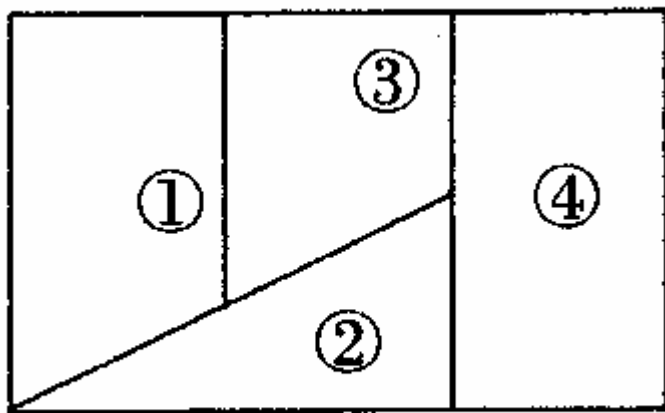
$$= \frac{10 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 - 4 \times 10}{C_5^{52}}$$

$$= \frac{10200}{2598960}$$
$$\approx 0.00392$$

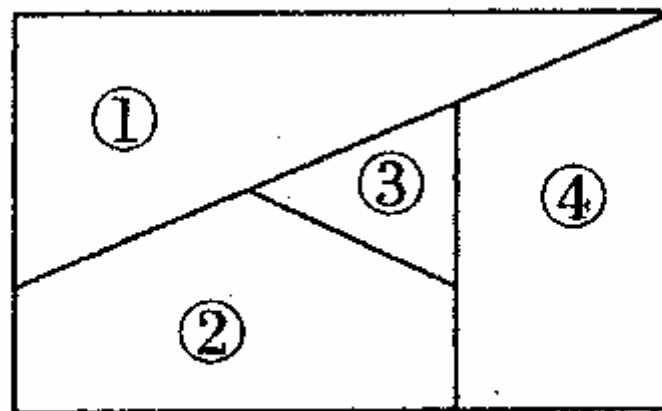
A	2	3	4	5
2	3	4	5	6
		...		
9	10	J	Q	K
10	J	Q	K	A

填色問題

如下圖所示，用 n 種不同的顏色為下圖兩塊廣告牌填色，當中 ① ② ③ ④ 四個區域中，相鄰的區域不塗同一種顏色。



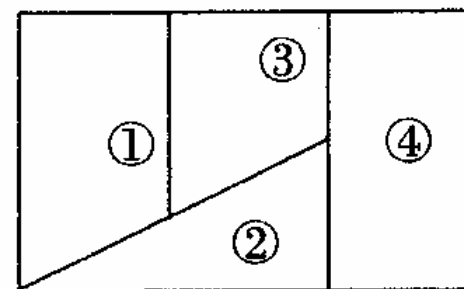
(1)



(2)

(1) 設 $n = 6$ ，為圖 ① 填色有多少種不同方法？

- 第一步，給區域 ① 填色，有6種方法
 - 第二步，給區域 ② 填色，有5種方法
 - 第三步，給區域 ③ 填色，有4種方法
 - 第四步，給區域 ④ 填色，有4種方法
- 綜上，由分步乘法計數原理，不同的填色方法有 $6 \times 5 \times 4 \times 4 = 480$

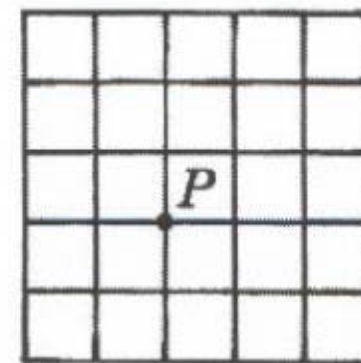


(1)

◎【79夜大(自), 單選】右圖中, 每一小格皆為正方形, P 為如圖所示之一格子點。若在圖中任取其他兩相異格子點, 則此二點與P 三點共線之機率為

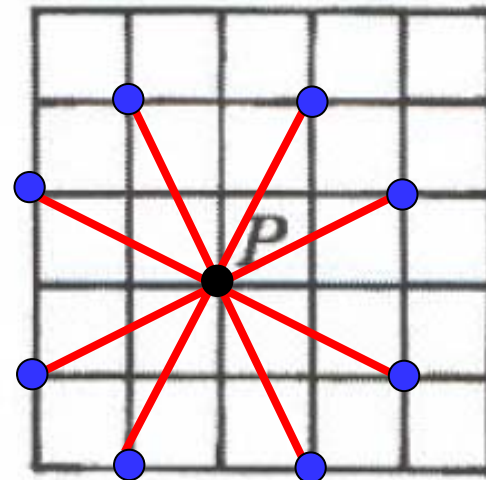
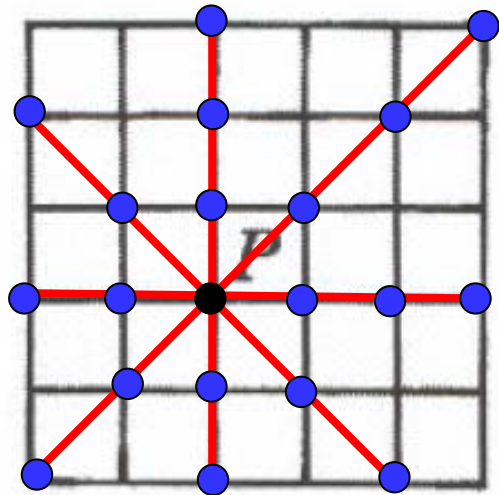
(A) 6/119 (B) 2/35 (C) 8/119 (D) 7/85 (E) 11/119。

解: (C)



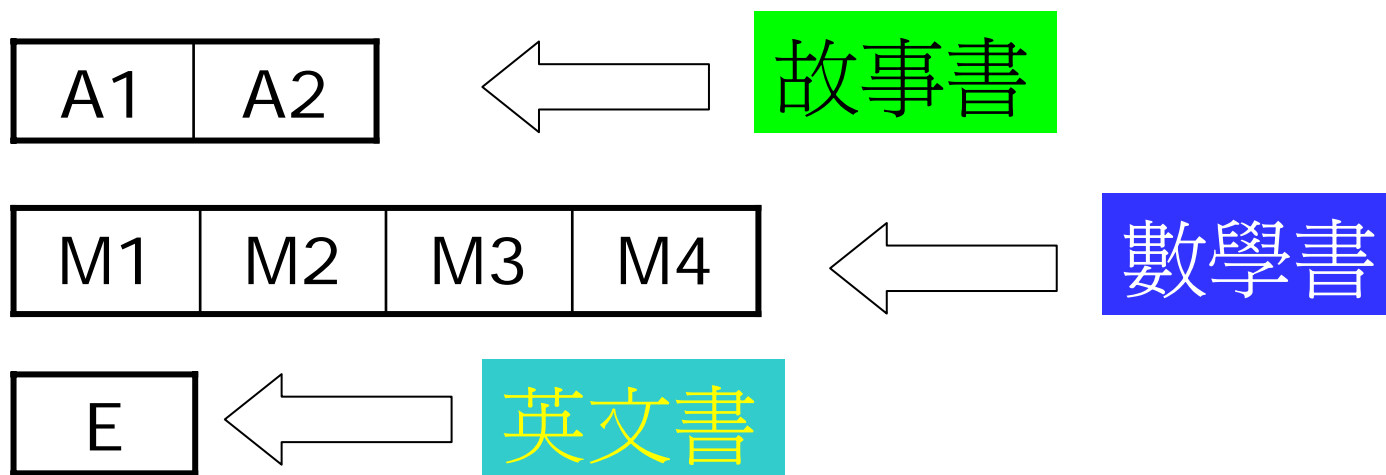
$$\frac{C_2^5 + C_2^5 + C_2^5 + C_2^4 + 4C_2^2}{C_2^{35}} = \frac{40}{595} = \frac{8}{119}$$

解説:



◎【79日大(社)，填充】把2本不同的故事書，4本不同的數學書及1本英文書排成一列。假設故事書必須排在一起，數學書也必須排在一起，則這樣的排法共有_____種。

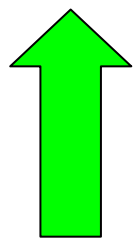
解：288



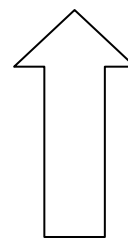
$$3! \times 2! \times 4! = 288$$

◎【84日大(社)，填充】一盒中有10個球，球上分別印有號碼1到10，今由盒中取4球，則4球的號碼中第二大數目是7的機率為_____。

解：3/14



$$C_1^3$$



$$C_2^6$$

所以 $\frac{C_1^3 C_2^6}{C_4^{10}} = \frac{45}{210} = \frac{3}{14}$

◎【86日大(社)，填充】從一個10人的俱樂部，選出一位主任，一位幹事和一位會計，且均由不同人出任，如果10人中的甲君和乙君不能同時被選上，那麼總共有_____種選法。

解：672

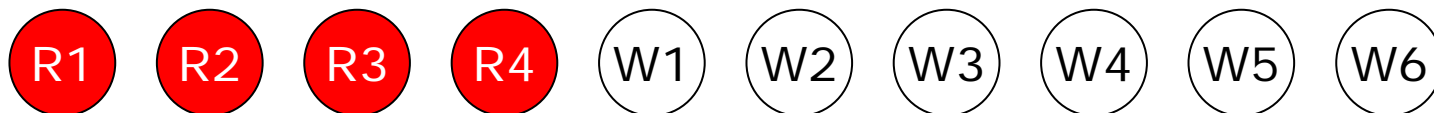
3種

	主任	幹事	會計
→	C_1^2	C_1^8	C_1^7
	C_1^8	C_1^7	C_1^6

所以 $3(C_1^2 \times C_1^8 \times C_1^7) + (C_1^8 \times C_1^7 \times C_1^6) = 336 + 336 = 672$

高考複習試題:

- 一個袋內裝有4個不同的紅球，6個不同的白球，若取出一個紅球記2分，取出一個白球記1分，從袋中取5個球，使總分不少於7分的取法有多少種？





解:

- 設有 x 個紅球， y 個白球，則得:

$$\begin{cases} 2x + y \geq 7 \\ x + y = 5 \end{cases}, \text{其中} \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 6 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

- 因此，所求的取法總數:

$$C_2^4 C_3^6 + C_3^4 C_2^6 + C_4^4 C_1^6 = 120 + 60 + 6 = 186$$

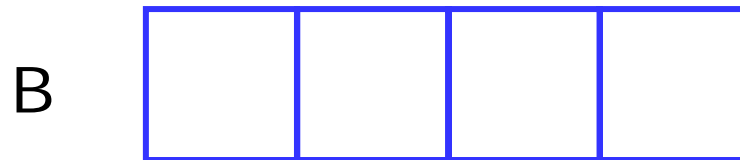
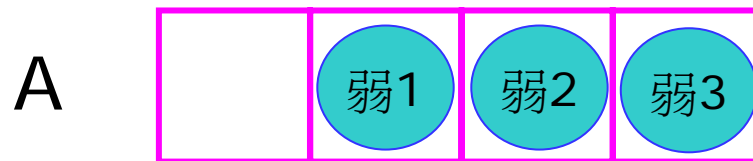


高考題

- 8 支球隊中有 3 支弱隊。現分成 A、B 兩組，每組各有 4 支球隊，求：
 1. A、B 兩組中有一組恰有 2 支弱隊的概率
 2. A 組中至少有兩支弱隊的概率

試解:

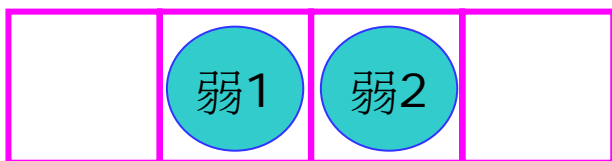
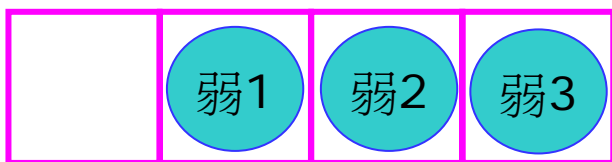
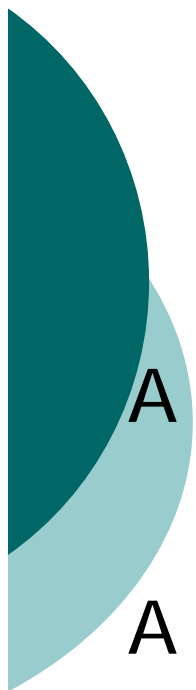
A、B 兩組中有一組恰有 2 支弱隊的機率



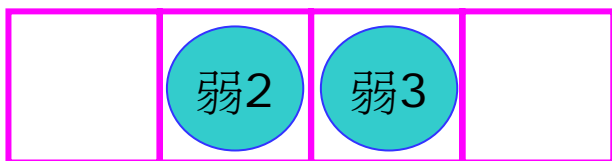
$$1 - \frac{C_3^3 C_1^5}{C_4^8} - \frac{C_3^3 C_1^5}{C_4^8} = 1 - \frac{5}{70} - \frac{5}{70} = \frac{6}{7}$$

試解:

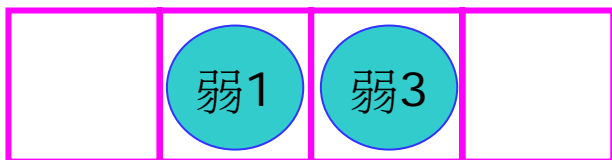
A 組中至少有兩支弱隊的概率



A



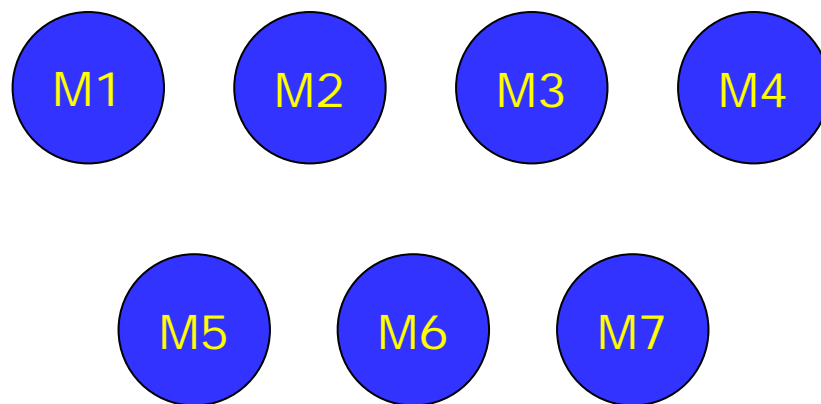
A



$$\frac{C_1^5 C_3^3}{C_4^8} + \frac{C_2^5 C_2^3}{C_4^8} = \frac{5}{70} + \frac{30}{70} = \frac{35}{70} = \frac{1}{2}$$


排隊影相問題: 7人排隊影

分成兩排，前排3人，後排4人，有多少種不同排法？

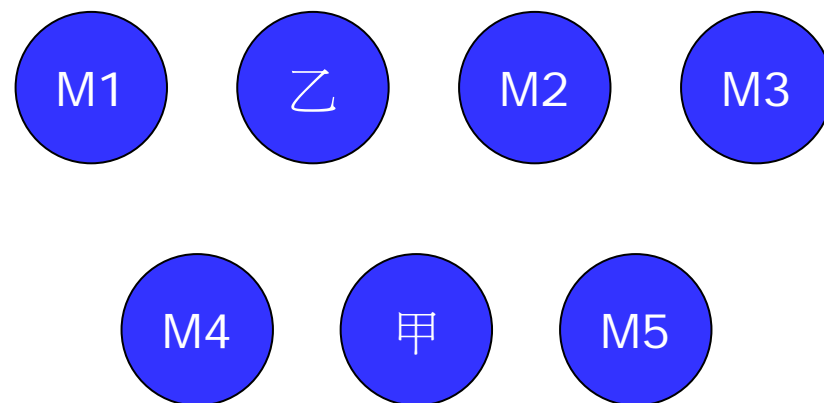


$$P_7^7 = 5040$$

$$C_4^7 P_3^3 P_4^4 = 35 \times 6 \times 24 = 5040$$

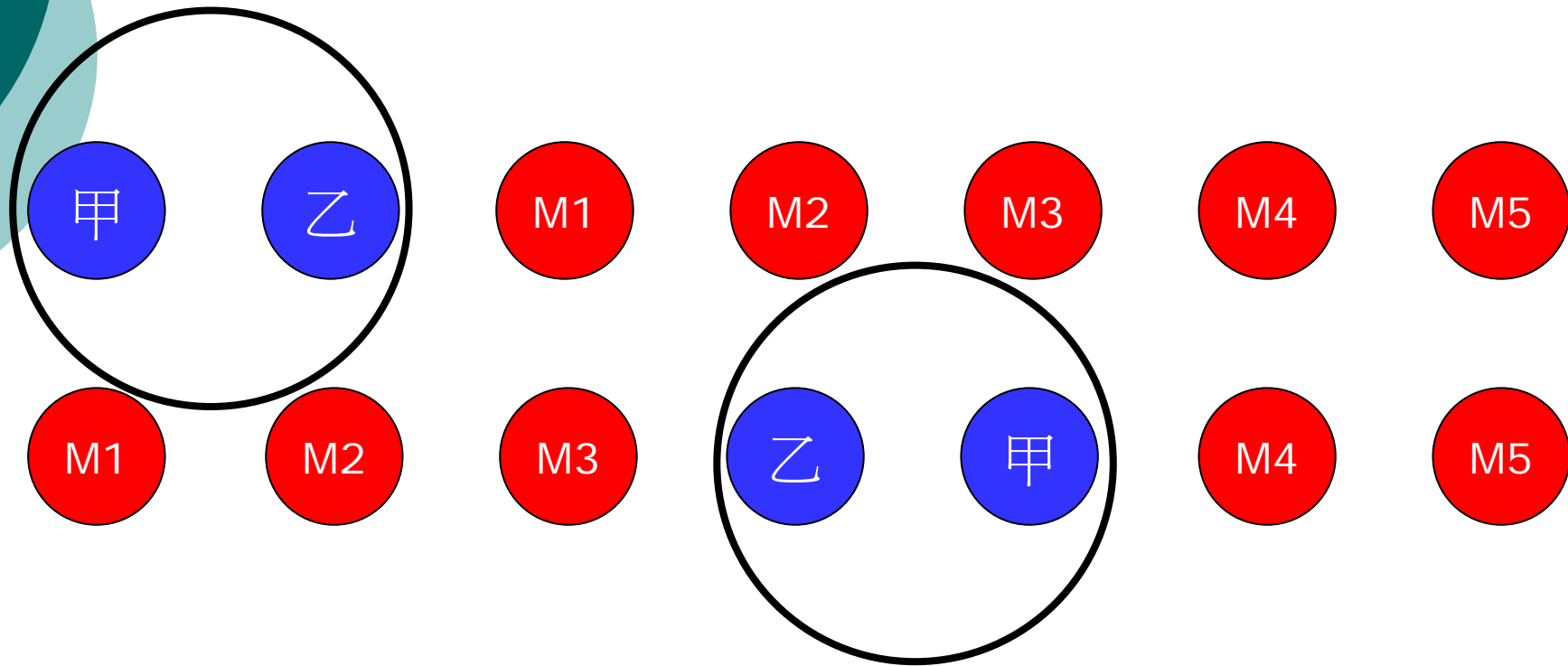


分成兩排，前排3人，後排4人，但甲必須在前排，乙必須在後排，有多少種不同排法？




$$P_1^3 P_1^4 P_5^5 = 3 \times 4 \times 120 = 1440$$

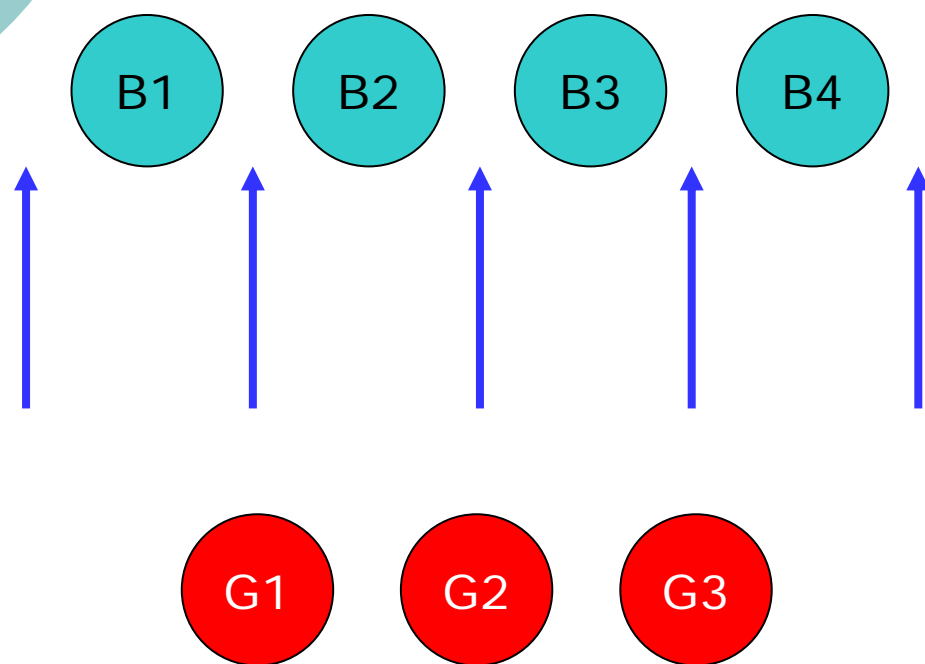
若排成一排，甲、乙兩人必須相鄰的有多少種不同排法？



$$P_2^2 P_6^6 = 2 \times 6 \times 120 = 1440$$

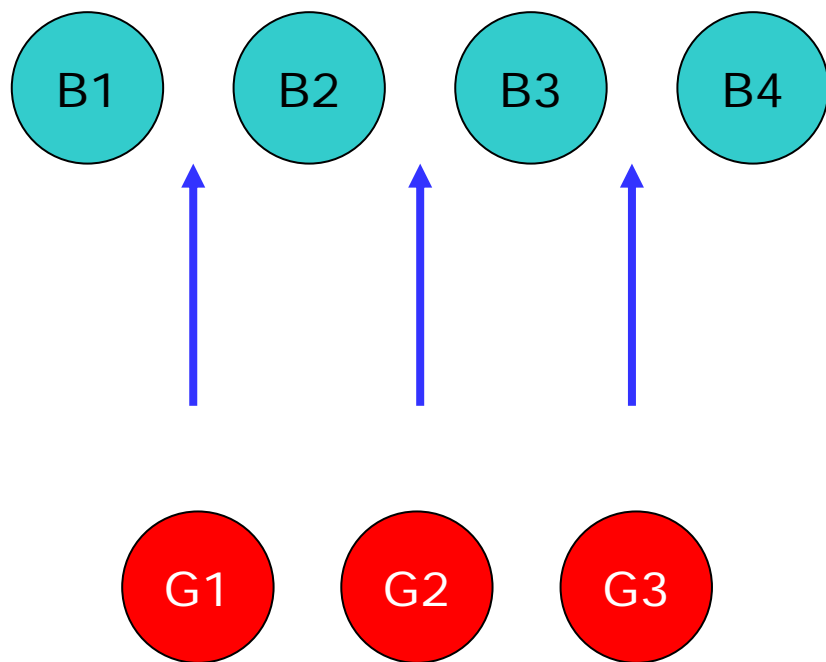


若排成一排，其中有4名男生，3名女生，
女生不能相鄰，有多少種不同排法？



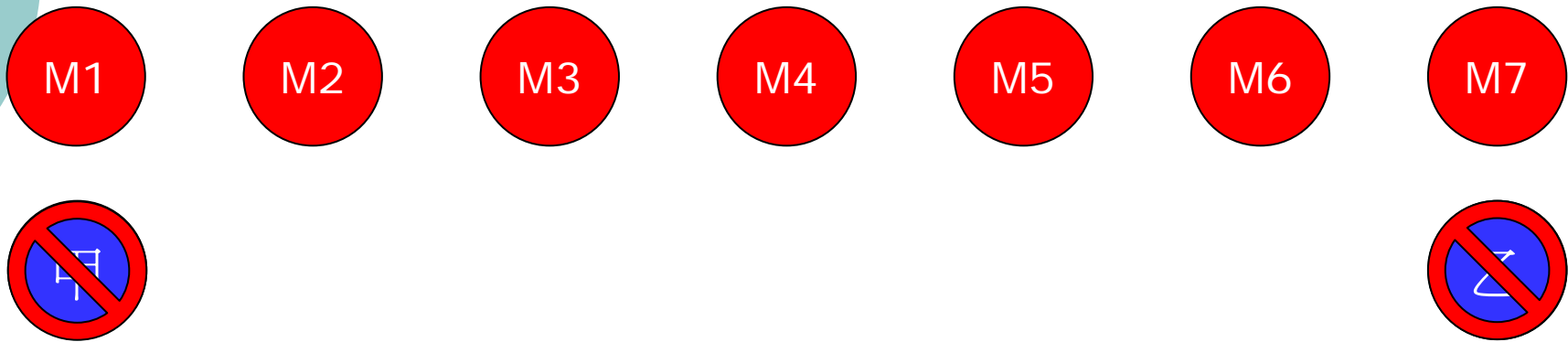
$$P_3^5 P_4^4 = 60 \times 24 = 1440$$

若排成一排，其中有**4**名男生，**3**名女生，
男、女生相間而排，有多少種不同排法？



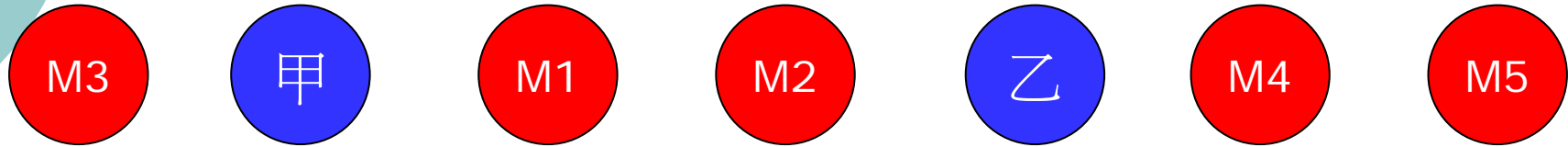
$$P_3^3 P_4^4 = 6 \times 24 = 144$$

若排成一排，甲不排在隊頭，乙不排在隊尾，有多少種不同排法？



$$P_7^7 - P_6^6 - P_6^6 + P_5^5 = 5040 - 720 - 720 + 120 = 3720$$

排成一排，甲、乙之間恰隔 2 人，有多少種不同排法？



$$P_2^5 P_2^2 P_4^4 = 20 \times 2 \times 24 = 960$$