圓錐曲線上任意一點的直角弦的性質及其應用

常熟市中學　　薛惠良

我們把過圓錐曲 C 上任意一點 P 作互垂直的兩條直線 PQ、PR 交圓錐曲線於 Q、R 兩點，則稱直線 QR 爲圓錐曲線 C 關於 P 點的直角弦。

文『1』給出了關於拋物線對頂點的直角弦的一個充要條件。

文『1』給出了有心圓錐曲線對中心的直角弦的一組充要條件。

文『2』給出了在圓錐曲線在標準方程條件下對頂點的直角弦的一組充要條件。

本文給出圓錐曲線上任意一點的直角弦的一個性質：

命題 1:過拋物線 $y^2=2px$（$p>0$）的通經的一個端點 $P(\frac{p}{2},p)$作兩條相互垂直的弦交拋物線於 Q、R 兩點,則直線 QR 過定點 $M(\frac{5p}{2},-p)$。

對於拋物線 $y^2=2px$ 上非通徑的端點,而是從拋物線上任一點 $P(x_0,y_0)$作兩條互相垂直的弦 PR、PQ,直線 RQ 是否過定點？如果過定點，那麼這定點隨著 P 的變化,其軌跡如何。

命題 2:在拋物線 $y^2=2px$ 上任取一點 $P(x_0,y_0)$，作兩條相互垂直的弦 PQ、PR，則直線 QR 過定點 $M(2p+x_0,-y_0)$. 且 M 的軌跡爲 $y^2=2p(x-2p)$.

對於橢圓,雙曲線是否也具有上述性質呢?

命題 3:在橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上任取一點 $P(x_0,y_0)$作兩條互相垂直的弦 PQ、PR, 則直線 QR 過定點 $M(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x_0,-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}y_0)$且 M 的軌跡爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2})^2$$

命題 4:在雙曲線$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$上任取一點 P($x_0$,$y_0$)作兩條互相垂直的弦 PQ、PR, 則直線 QR 過定點 M($\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x_0$,$-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}y_0$)且 M 的軌跡爲 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2})^2$

對於一般二次曲線是否具有上述性質,若有,其定點 M 的軌跡是什麼?

命題 5:對於二次曲線 C:$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$(A、B、C 不同時爲 0),在 C 上任取一點 P(x_0,y_0)作兩條相互垂直的弦 PQ、PR, 則直線 QR 過定點 M($\frac{-Ax_0-By_0+Cx_0-D}{A+C}$,$\frac{Ay_0-Bx_0-Cy_0-E}{A+C}$) 且 M 的軌跡與 C 相似(具有相同的離心率).

證明:將座標原點平移至 P(x_0,y_0)

則有:$\begin{cases} x=x_0+x' \\ y=y_0+y' \end{cases}$ 代入 C 得

$A(x'+x_0)^2+B(x'+x_0)(y'+y_0)+C(y'+y_0)^2+D(x'+x0)+E(y'+y0)+F=0$ 就是:

$Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2+Dx'+Ey'+2Ax_0x'+B(x_0y'+y_0x')+2Cy_0y'+Ax_0^2+Bx_0y_0+Cy_0^2+Dx_0+Ey_0+F=0$

$\because P\in C$ 即有 $Ax_0^2+Bx_0y_0+Cy_0^2+Dx_0+Ey_0+F=0$

這樣 C 在新坐標系中的方程沒有常數項，即

$Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2+(D+2Ax_0+By_0)x'+(E+2Cy_0+Bx_0)y'=0$

現設滿足條件的直線 BC 在新坐標系中的方程爲 $lx'+my'=1$.構建 x',y' 的二元二次齊次方程:

$Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2+[(D+2Ax_0+By_0)x'+(E+2Cy_0+Bx_0)](lx'+my')=0$

$[A+l(D+2Ax_0+By_0)]x'^2+tx'y'+[C+m(E+2Cy_0+Bx_0)]y'^2=0(*)$ t 爲 x'y' 的係數.

由條件點 P、Q、R 在曲線 C 上，即 P(0,0)、$Q(x_1',y_1')$、$R(x_2',y_2')$滿足方程(*).

又設 PQ、PR 方程分別是 $y'=k_1x'$，$y'=k_2x'$,

PQ⊥PR 則 $k_1 \bullet k_2=-1$.

這樣： $(k_1x'-y')(k_2x'-y')=0$

即 $k_1k_2x'^2-(k_1+k_2)x'y'+y'^2=0$

便是 $x'^2+(k_1+k_2)x'y'-y'^2=0$ 與方程（＊）等價。

故有 $\dfrac{A+l(D+2Ax_0+By_0)}{C+m(E+2Cy_0+Bx_0)}=-1$

∴ $l=-\dfrac{(A+C)+m(E+2Cy_0+Bx_0)}{D+2Ax_0+By_0}$

∴BC 方程爲：$-\dfrac{A+C+m(E+2Cy_0+Bx_0)}{D+2Ax_0+By_0}x'+my'=1$

即 $[(A+C)x'+(D+2Ax_0+By_0)]+[-(D+2Ax_0+By_0)y'+E+(2Cy_0+Bx_0)x']m=0$

令 $(A+C)x'+(D+2Ax_0+By_0)=0$

$(E+2Cy_0+Bx_0)x'-(D+2Ax_0+By_0)y'=0$

得 $\begin{cases} x'=-\dfrac{D+2Ax_0+By_0}{A+C} \\ y'=-\dfrac{E+2Cy_0+Bx_0}{A+C} \end{cases}$

這樣就有 $\begin{cases} x=x_0+x'=\dfrac{-Ax0-By0+Cx0-D}{A+C} \\ y=y_0+y'=\dfrac{Ay_0-Bx_0-Cx_0-E}{A+C} \end{cases}$ （＊'）

∴直線 RQ 過定點$\left(\frac{-Ax_0-By_0+Cx_0-D}{A+C},\ \frac{Ay_0-Bx_0-Cy_0-E}{A+C}\right)$

又由（*′）可得：$(A-C)^2+B^2\neq 0$ 時，

$$\begin{cases} x_0=-\dfrac{(A^2-C^2)x+B(A+C)y+D(A-C)+B\bullet E}{(A-C)^2+B^2} \\ y_0=-\dfrac{B(A+C)x-(A^2-C^2)y+B\bullet D+E(A-C)}{(A-C)^2+B^2} \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} x_0=-\dfrac{(A+C)[(A+C)x+By]+D\bullet(A-C)+B\bullet E}{(A-C)^2+B^2} \\ y_0=-\dfrac{(A+C)[Bx-(A-C)y]+B\bullet D-E(A-C)}{(A-C)^2+B^2} \end{cases}$$

又 $P(x_0, y_0)\in C$

∴ 有

$A[(A-C)x+By]^2+B[(A-C)x+By][Bx-(A-C)y]+C[Bx+(A-C)y^2]+D'x+E'y+F'=0$

化簡得 $[(A-C)^2+B^2](Ax^2+Bxy+Cy^2)+D'x+E'y+F'=0$

∵ $(A-C)^2+B^2\neq 0$

∴ $Ax^2+Bxy+Cy^2+D''x+E''y+F''=0$

即爲所求 M 軌跡，與方程（*）相似。

若 $(A-C)^2+B^2=0$,

即 $A=C, B=0$.

曲線 C 爲 x2+y2+Dx+Ey+F=0, 其曲線 BC 必過圓心。

命題得證。

利用上述定理或定理證明的方法可簡潔地解決二次曲線中的直角弦問題。

例 1：1999 年全國高中數學聯賽第 6 題:

已知點 A(1,2),過點(5,-2)的直線與拋物線 $y^2=4x$ 交於另外兩點 B、C,那麼此三角形是:

(A)銳角三角形　　(B)鈍角三角形　　(C)直角三角形　　(D)答案不確定

此問題等價於：拋物線 $y^2=4x$ 上一點 A(1,2)作兩條互相垂直的弦拋物線於 B、C 兩點，則直線 BC 過定點(5,-2).而點 A(1,2)是拋物線 $y^2=4x$ 的通徑的一個端點,那麼由命題 1 就能得到結果爲（C）

例 2：2002 年全國高中數學聯賽第一試最後一道題：

已知 C0:x2+y2=1 和 C1: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a>b>c)試問當 a、b 滿足什麼條件時，以 C1 上的任意一點 P 均存在以 P 爲頂點與 C0 外切與 C1 內切的平行四邊形？並證明你的結論。

分析：易知圓的外切平行四邊形 PQRS 是菱形，圓心 O 爲菱形中心，則其對角線 PS⊥QS 即 OP⊥OQ。

這樣原命題等價於過 O 作 OP、OD，交橢圓於 P、Q，使 OP⊥OQ，滿足什麼條件時 PQ 與 C_0：

$X^2+Y^2=1$ 相切。

解：設 PQ 方程爲：lx+my=1,C_1 方程爲 $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$

構建方程（*）$b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2\times(lx+my)^2=0$

得　　（b^2-a2b2l2）x2-2a2b2lmxy+(a2-a2b2m2)y2=0

對於方程（*）經過原點 O（0,0）,P（x_1,y_1）,Q(x_2,y_2)

又設 PQ 方程爲 $y=k_1x$,OQ 方程爲 $y=k_2x(k_1k_2=-1)$

構建方程（*）（k_1x-y_1）$(k_2-y)=0$

即　　$k_1k_2x^2-(k_1+k_2)xy+y^2=0$

亦就是　　$x^2+(k_1+k^2)xy-y^2=0$　　(*)

(*)與（*′）等價得：$b^2-a^2b2l^2+a^2-a^2b^2m^2=0$

即　　$a^2+b^2=a^2b^2(l^2+m^2)$

即　　$\frac{1}{l^2+m^2}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

∵PQ 與圓 C_0 相切，∴ $\frac{1}{\sqrt{l^2+m^2}}=1$

故有　$\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=1$　　∴當且僅當 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$　時，滿足題設條件。

作者簡介：薛惠良（1957—），男，江蘇常熟人，中學高級教師。2005－2006 學年度教育部赴香港首批專家教師。